

## Correction du DM n°12

**Exercice 1**

1. (a) On peut utiliser deux méthodes :

- $0 + 2 \times 0 + 0 = 0$  donc  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ .

- Soient  $X, Y \in E$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  et on a  $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ ,  $y_1 + 2y_2 + y_3 = 0$ .

On s'intéresse au vecteur  $\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$  et on calcule

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 &= \lambda(x_1 + 2x_2 + x_3) + y_1 + 2y_2 + y_3 \\ \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $\lambda X + Y \in E$ .  $E$  est donc un sous espace vectoriel.

Le problème de cette méthode, c'est qu'elle ne permet pas de trouver les vecteurs qui engendrent cet espace vectoriel. Voici l'autre méthode :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x + 2y + z = 0 \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$E = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$E = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) On a  $1 \times 0 + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0$  donc  $X \in E$ .

(c) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ , 2 inconnues tels que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve assez facilement que  $x = -1$  et  $y = 2$ . On a alors  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. (a) Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 \\ &= \lambda(x_1 + 2x_2 + x_3) + (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est une application linéaire.

- (b) On a  $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), x + 2y + z = 0 \right\} = E$

On s'intéresse à l'image de  $f$ . On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et on calcule

$$f(e_1) = 1, \quad f(e_2) = 2, \quad f(e_3) = 1$$

Ainsi,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .

- (c) Soit  $X \in E$ . On note  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et on a alors  $x + 2y + z = 0$ .

On calcule  $f(X) = x + 2y + z = 0$ . Ainsi,  $f(E) = \{0\}$ .

## Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$  et on introduit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1/2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. clf

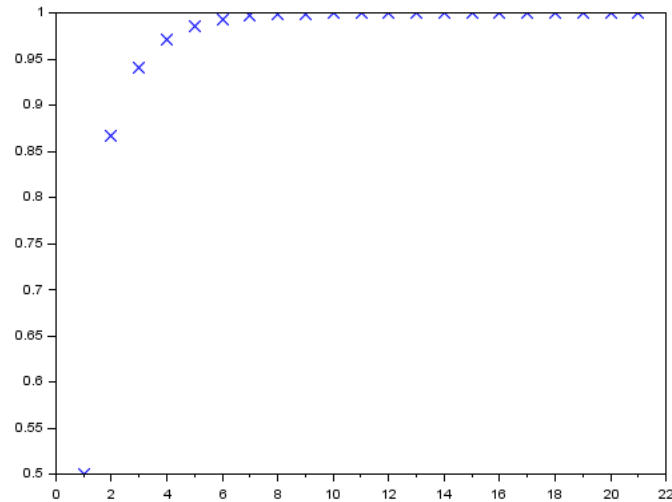
```
function y = f(x)
    y = sqrt(x^2 - x + 1)
endfunction
```

```
u = zeros(1,21)
u(1) = 1/2
for k = 1:20
    u(k+1) = f(u(k))
end
```

```
plot(u, 'x')
```

2. Tracer le graphe obtenu sur Scilab. Que peut-on conjecturer quand à la limite de la suite ?

On obtient le graphe sur la prochaine page.  $\text{On peut conjecturer que la suite } (u_n) \text{ tend vers } 1.$



### Exercice 3

1. Afin de répondre à cette question, on prend  $x, y \in \mathbb{R}$  deux inconnues tels que  $v = xu_1 + yu_2$ . On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} 2 = x + y \\ -10 = -3x - y \\ 26 = 5x - 4y \\ 2 = 2x + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = x + y \\ -8 = -2x \quad (L_1 + L_2) \\ 34 = 9x \quad (4L_1 + L_2) \\ 4 = x \quad (3L_1 - L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = x + y \\ 4 = x \\ 34/9 = x \\ 4 = x \end{cases}$$

Ceci n'est pas possible donc  $v$  n'appartient pas à  $F$ .

2. Par définition,  $(u_1, u_2)$  forme une famille génératrice de  $F$ . Il faut montrer que c'est également une famille libre.

Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , tel que  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ . Cela amène au système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 = 0 \\ 9\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

La famille  $(u_1, u_2)$  est libre. C'est donc une base de  $F$ .

3. Soient  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On calcule

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= (\lambda x_1 + x_2)u_1 + (\lambda y_1 + y_2)u_2 \\ &= \lambda(x_1 u_1 + y_1 u_2) + (x_2 u_1 + y_2 u_2) \\ &= \lambda f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc l'application  $f$  est linéaire.

Par définition,  $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid xu_1 + yu_2 = 0 \right\}$ . Or,  $(u_1, u_2)$  étant une famille libre, la seule solution

à l'équation  $xu_1 + yu_2 = 0$  est  $x = y = 0$ . Ainsi  $\boxed{\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$ .

Si on note  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , on a  $f(e_1) = u_1$  et  $f(e_2) = u_2$ . Ainsi

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, u_2) = F.}$$